MATRICI

Siano $m, n \in \mathbb{N}^*$ e sia R un anello con 1. Si definisce **matrice di tipo** $m \times n$ a coefficienti in R una tabella costituita da m righe e n colonne di elementi di R (che si dicono appunto **coefficienti** o anche **entrate** della matrice):

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Denotiamo $\mathbf{M_{mn}}(R)$ l'insieme delle **matrici** $m \times n$ **a coefficienti in** R. Se $n = m$ le matrici si dicono **quadrate** e in tal caso si scrive $\mathbf{M_n}(R)$ invece che $M_{nn}(R)$.

Definiamo su $M_{mn}(R)$ una **somma** sommando tra loro le entrate nella stessa posizione:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Esempio Comsideriamo $A, B \in M_{23}(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Allora $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Con questa somma $M_{mn}(R)$ risulta un gruppo additivo commutativo, infatti si verificano facilmente l'associatività e la commutatività della somma, l'elemento neutro è la matrice con tutte le entrate nulle, l'opposto è la matrice con le entrate opposte, ossia $-(a_{ij}) = (-a_{ij})$.

È possibile definire più di un **prodotto** tra matrici (per esempio si potrebbe definire un prodotto moltiplicando tra loro le entrate nella stessa posizione $(a_{ij}b_{ij})$. Per motivi che in parte vedremo più avanti (il legame tra matrici e sistemi e tra matrici e applicazioni lineari) è utile definire un prodotto nel modo seguente.

Definiamo anzitutto la moltiplicazione tra una matrice costituita da una sola riga $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e una costituita da una sola colonna $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ della stessa lunghezza ponendo

$$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$$

Siano ora A e B due matrici tali che **il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B.** Ad esempio sia A di tipo $n \times m$ e B di tipo $m \times p$. Sia $A := (a_{ik})$ e $B := (b_{kj})$. Definiamo allora il prodotto AB come la matrice di tipo $n \times p$ $C = (c_{ij})$ ove si ponga

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

In altre parole al posto ij della matrice prodotto AB si mette il prodotto tra la riga i-esima di A e la colonna j-esima di B. Per questa ragione tale prodotto si dice il **prodotto righe per colonne** di A con B.

Si verifica facilmente che il prodotto righe per colonne è associativo. Notiamo invece che non è commutativo quando, come nel caso di matrici $n \times n$, è possibile calcolare AB e BA (nel caso di una matrice A di tipo $m \times n$ e una B di tipo $n \times m$ si ha che AB è di tipo $m \times m$ mentre BA è di tipo $n \times n$ e quindi sono necessariamente diverse).

Esempio Date le matrici due righe e due colonne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ risulta $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ mentre $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Limitiamoci per il momento al caso di matrici **quadrate** $n \times n$ ad elementi in R. Allora $\mathbf{M_n(R)}$ **è un anello non commutativo con 1** anche se R è commutativo. Infatti è un gruppo commutativo con la somma definita sopra e il prodotto righe per colonne gode delle seguenti proprietà:

a) Proprietà associativa.

b) Esistenza di un elemento neutro, ossia tale che $AI = IA = A, \quad \forall A \in M_n(R)$.

Questo è la matrice che chiameremo **matrice identica**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

c) Inoltre vale la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto.

Osserviamo che tale anello non è integro perché il prodotto di due matrici non nulle può essere nullo, per esempio date $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ risulta $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; in tal caso tali matrici sono zerodivisori.

Quindi in $M_n(R)$ non tutte le matrici quadrate sono invertibili, anche se R fosse un campo, perché gli elementi inver-tibili non sono mai zerodivisori, infatti abbiamo già visto che se $AB = 0$ e $A \neq 0$ è invertibile, moltiplicando $AB = 0$ per A^{-1} si ha $A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$; allora $(A^{-1}A)B = 0$ e dunque $IB = B = 0$.

Se A e B sono matrici invertibili si ha $B^{-1}A^{-1}AB = ABB^{-1}A^{-1} = I$ e quindi anche AB è invertibile e vale la formula $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ciò significa che l'insieme delle matrici invertibili di $M_n(R)$, insieme che denoteremo con $Gl_n(R)$ è un gruppo moltiplicativo non commutativo (detto **gruppo lineare**), infatti è chiuso rispetto al prodotto e inoltre abbiamo già osservato che:

a) Il prodotto gode della proprietà associativa.

b) Esiste un elemento neutro I rispetto al prodotto (I è invertibile, quindi $I \in Gl_n(R)$).

c) Ogni elemento ha un inverso, perché l'inversa dell'inversa di A è proprio A, quindi le inverse delle matrici invertibili stanno in $Gl_n(R)$.

Possiamo inoltre definire una moltiplicazione esterna tra elementi dell'anello R ed elementi di $M_{mn}(R)$: se $c \in R$ e $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(R)$ poniamo $c(a_{ij}) = (ca_{ij})$, ossia

$$c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che $\forall\ a, b \in R$ e $\forall\ A, B \in M_{mn}(R)$ valgono le seguenti proprietà:

1) $a(A+B) = aA + aB$;
2) $(a+b)A = aA + bA$;
3) $a(bA) = b(aA) = (ab)A$;
4) $1A = A$;
5) $(-1)A = -A$.

Per ogni matrice $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(R)$, definiamo la **trasposta** di A e la indichiamo con ${}^tA$ la matrice che al posto ij ha a_{ji}. è chiaro che ${}^tA$ è la matrice che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne.

Esempio Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, allora ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Proprietà della trasposta:
a) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
b) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
c) ${}^t(\alpha A) = \alpha{}^tA$.
d) Se $A \in Gl_n(R)$, allora ${}^tA \in Gl_n(R)$ e si ha: $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Una matrice si dice **simmetrica** se $A = {}^tA$.

Esercizi (Quelli contrassegnati con (*) sono piú difficili e si possono trascurare) :

1) Calcolare AB e BA con $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Verificare la proprieta' associativa per il seguente prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3) Calcolare A^3 dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4) Dire quando si verifica che $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ e determinare un esempio in cui si verifica e uno in cui non si verifica.

5) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare AB, BA, A^2, B^2.

6) Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(*) Provare che il prodotto di due matrici diagonali è una matrice diagonale.

7) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare A^2, A^3, A^4, $(A-I)^2$, $(A-I)^3$, $(A-I)^4$.

8) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $a \neq b$, determinare tutte le matrici B tali che $AB = BA$.

9) Verificare che le uniche matrici $A \in M_2(R)$ che commutano ($AB = BA$) con tutte le matrici 2×2 sono le matrici della forma λI con $\lambda \in R$.

10) Provare con un esempio che se A e B sono matrici simmetriche, AB non è necessariamente simmetrica.

(*) **11)** La traccia di una matrice quadrata A è la somma degli elementi sulla diagonale principale, ossia $\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Provare che $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$. (Per capire la strategia si consiglia di cominciare con matrici di ordine 2 o 3)

(*) **12)** Sia A una matrice antisimmetrica (${}^tA = -A$). Verificare che A^2 è simmetrica e A^3 è antisimmetrica.

(*) **13)** Provare che se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è tale che $A^tA = 0$, allora $A = 0$. (Per capire la strategia si consiglia di cominciare con matrici di ordine 2 o 3)

14) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che
$$A^2 + 3A + 2I = 0.$$
Provare che A è invertibile.

15) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $A^p = 2I_n$ per qualche intero positivo p. Provare che:
a) A è invertibile
(*) b) $A - I_n$ è invertibile.

16) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $A^2 = 2A - I$.
a) Dedurre che $A^3 = 3A - 2I$.
b) E' possibile esprimere A^{100} come funzione lineare di A e I?

(*) **17)** Provare che l'inversa di una matrice simmetrica invertibile è anch'essa simmetrica.

18) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\phi_A : \quad M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $\phi_A(B) = AB$. Provare che ϕ_A è un'applicazione iniettiva e surgettiva. Dire se ϕ_A è un omomorfismo di gruppi e/o anelli.

19) Siano A e B matrici a coefficienti reali. Provare o confutare (con un controesempio) le seguenti affermazioni:
a) se AB é definita, anche BA é definita.
b) se AB é definita e A é quadrata, allora anche BA é definita.
c) se $AB = BA$, allora A e B sono entrambe quadrate dello stesso ordine.
d) se A^2 é definita, allora A é quadrata.
e) se A ha righe (o colonne) nulle, allora AB ha righe (o colonne) nulle.
f) se $AB = 0$, allora $A = 0$ oppure $B = 0$.
g) $(AB)^2 = A^2B^2$.
h) se $AB = A$, allora $B = I$.
i) se $A^2 = A$, allora $A = I$ oppure $A = 0$.

Determinanti.

Per studiare le matrici quadrate di ordine n a elementi in un anello R (per esempio per vedere quando sono invertibili) è fondamentale la nozione di **determinante**.

Ci sono varie definizioni di determinante di una matrice quadrata A, tutte equivalenti. Ne diamo ora una induttiva che ove il determinante è definito diversamente si chiama regola di Laplace (o Primo Teorema di Laplace).

Se $n = 1$, cioè se $A = (a)$ definiamo determinante di A, denotato con det(A) o con $|A|$, il numero $det(A) = a$

Se A è una matrice quadrata di ordine n ad elementi in R, diciamo **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij}, l'elemento A_{ij} definito come $(-1)^{i+j}$ per il determinante della matrice che si ottiene da A eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima.

Allora se $n \geq 2$ definiamo

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}.$$

Per esempio se $n = 2$, cioè se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ dalla definizione data risulta $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Si può provare che per ogni matrice quadrata $A = (a_{ij})$ e per ogni $r = 1, \ldots, n$ si ha

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} A_{rj}$$

cioè il determinante non dipende dalla riga scelta. Questo modo di esprimere il determinante di A si chiama **lo sviluppo del determinante** secondo la riga r-esima.

Analogamente abbiamo una formula per lo sviluppo del determinante secondo la colonna s-esima. Precisamente si ha

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{js} A_{js}.$$

Le seguenti proprietà sono di facile verifica e sono molto utili per rendere piú agevole il calcolo del determinante, soprattutto nel caso di matrici di ordine grande:

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

1. Se una riga (o una colonna) di A è nulla, allora $det(A) = 0$. Basta infatti sviluppare rispettoa quella riga (o colonna).
2. $det(A) = det({}^tA)$.
   Si verifica che per le matrici di ordine 2 è vero e si prova poi per induzione.
3. Se si scambiano in A due righe (o due colonne) il determinante cambia di segno.
   Si verifica che per le matrici di ordine 2 è vero e si prova poi per induzione.
4. Se A ha due righe (o due colonne) eguali , $det(A) = 0$. Infatti se scambiamo le due righe uguali il determinante non cambia, ma per 3 dovrebbe cambiare segno e quindi è nullo (questa dimostrazione va bene se 2 non divide 0 in R, altrimenti si dimostra per induzione).
5. Se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1i} + b_{i1} & \ldots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

allora

$$det(A) = det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1i} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(basta sviluppare rispetto alla riga somma). 6. Se moltiplichiamo una riga o una colonna di A per una costante $\lambda \in \mathbb{R}$, il determinante della matrice cosí ottenuta è $\lambda det(A)$. Ne segue che $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$. (Anche qui basta sviluppare rispetto alla riga che abbiamo moltiplicato per λ e raccogliere λ).
7. Se due righe (o due colonne) di A sono proporzionali, allora $det(A) = 0$. (Si raccoglie il fattore di proporzionalità λ e si ottiene il determinante di una matrice con due righe uguali).
8. Se si aggiunge a una riga (o colonna) di A un'altra riga (o colonna) moltiplicata per $\lambda \in \mathbb{R}$, il determinante non cambia. (Segue da 5 e da 7).
9. Se si aggiunge a una riga (o colonna) di A una combinazione linare delle rimanenti righe (o colonne), il determinante non cambia. (Per combinazione lineare delle righe si intende $a_1R_1 + a_2R_2 + \cdots + a_nR_n$ dove $a_i \in R$ e R_i è l'i-esima riga di $A\ \forall\, i = 1, \dots, n$)
10. Se R è un campo e le righe (o le colonne) di A sono linearmente dipendenti come vettori di R^n, allora $det(A) = 0$. (Per la nozione di dipendenza lineare si veda dopo la digressione sugli spazi vettoriali).
11. Se la matrice A è "triangolare" o "diagonale" det(A) è il prodotto degli elementi sulla diagonale, ossia:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Il calcolo di $det(A)$ viene molto facilitato se, utilizzando le proprietà precedenti, si trasforma nel calcolo del determinante di una matrice triangolare o almeno di una matrice che ha righe con molti zeri.

D'ora in poi considereremo solo matrici a coefficienti in un campo K anche se per alcuni degli enunciati seguenti basta che l'anello sia integro.

Teorema di Binet. *Se A e B sono due matrici quadrate $n \times n$, si ha*

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Dal teorema di Binet segue che se A è invertibile allora $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = 1$ e quindi $|A| \neq 0$ e $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. Vediamo ora che $|A|$ invertibile (se i coefficienti sono in un campo K basta $|A| \neq 0$) è anche condizione sufficiente e non solo necessaria affinché A sia invertibile. Occorre premettere il teorema seguente:

Secondo Teorema di Laplace. *Per ogni matrice quadrata A se r e s sono due interi distinti si ha*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj} A_{rj} = 0 = \sum_{j=1}^{n} a_{js} A_{jr}.$$

Dimostrazione. Moltiplicare la riga (o colonna) s-esima per i complementi algebrici di un'altra riga (o colonna) r-esima è come calcolare il determinante di una matrice ottenuta da A sostituendo alla riga (o colonna) r-esima la riga (o colonna) s-esima. Risulta cosí una matrice con due righe (o colonne) uguali e quindi ha determinante nullo.

Mettendo insieme questo teorema e la definizione di determinante data prima, si ha quindi:

$$(\star) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{sj} A_{rj} = \begin{cases} det(A) & \text{se } s = r \\ 0 & \text{se } s \neq r \end{cases}$$

Se A è una matrice quadrata diciamo **aggiunta** di A e denotiamo con $A^\star$ la matrice

$$A^\star =^t ((A_{ij}))$$

e cioè la matrice che al posto ij ha il complemento algebrico dell'elemento di posto ji.

Dalla formula $(\star)$ segue allora immediatamente: $AA^\star = det(A)I$.

Ne consegue il seguente criterio di invertibilità per una matrice quadrata A.

Teorema. *Una matrice quadrata $A \in M_n(K)$ è invertibile se e solo se $det(A) \neq 0$.*

Infatti avevamo già notato che una matrice invertibile ha determinante non nullo, d'altra parte se $det(A)$ è invertibile si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, A^\star.$$

Ne segue che se una matrice $A \in M_n(K)$ è zerodivisore deve avere $det(A) = 0$, ma si può provare anche il viceversa (questo si vede immediatamente se l'aggiunta è non nulla perché $AA^\star = det(A)I = 0$, ma si può provare anche quando $A^\star = 0$. Quindi in $M_n(K)$, con K campo, ogni matrice è o invertibile o zerodivisore. Questo non vale per matrici a coefficienti in un anello qualunque, per esempio in $M_n(\mathbb{Z})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è né invertibile né zerodivisore.

Esercizi

1) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2) Sia A una matrice $n \times n$. Calcolare $\det(-A)$.

3) Sapendo che $\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, calcolare

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{pmatrix}; \qquad \det \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Sia A una matrice in $M_n(K)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.
i) se $A^3 = I$, allora A è invertibile.
ii) se $A^2 = I$, allora $A = \pm I$.

iii) se $A^2 + A = 0$ e $\det A \neq 0$, allora $A = -I$.

10) Calcolare l'inversa delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DIGRESSIONE SUGLI SPAZI VETTORIALI

Uno **spazio vettoriale** su un campo K, detto anche K-spazio vettoriale, (K oltre a R può essere $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}_p$ con p primo) è un gruppo additivo commutativo V con una **operazione esterna** che ad ogni elemento (a, v) di $K \times V$ associa un elemento av di V verificante le seguenti proprietà:

a) $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$, per ogni $a \in K$ e per ogni $v_1, v_2 \in V$.

b) $(a + b)v = av + bv$, per ogni $a, b \in K$ e per ogni $v \in V$.

c) $a(bv) = b(av) = (ab)v$ per ogni $a, b \in K$ e per ogni $v \in V$.

d) $1v = v$ per ogni $v \in V$.

Gli elementi di uno spazio vettoriale V saranno detti **vettori** mentre gli elementi di K saranno detti **scalari** .

Proprietà aritmetiche negli spazi vettoriali:

a) $0v = 0$, per ogni $v \in V$.
b) $a0 = 0$ per ogni $a \in K$.
c)$(-1)v = -v$ per ogni $v \in V$.

Esempi:

Ogni campo K può essere considerato come spazio vettoriale su se stesso, prendendo come moltiplicazione esterna quella interna.

Anche K^n con le operazioni definite come sopra per $\mathbb{R}^n$ è un K-spazio vettoriale.

L'insieme $\mathcal{F} = \{f : K \longrightarrow K\}$ delle funzioni di K in K con le operazioni cosí definite: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(af)(x) = af(x)$ è uno spazio vettoriale su K perchè le operazioni soddisfano le proprietà elencate.

Pure $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dove la somma è quella usuale e il prodotto esterno per elementi di $\mathbb{R}$ è il prodotto definito in $\mathbb{C}$ (infatti $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Un altro esempio di spazio vettoriale reale sono i polinomi a coefficienti in K: $K[X]$ con la somma già definita e la moltiplicazione esterna $cf(x) = ca_0 + ca_1X + ca_2X^2 + \cdots + ca_nX^n$.

Anche $M_n(K)$ con la somma e la moltiplicazione esterna che già abbiamo definito è un K spazio vettoriale.

Sottospazi

Un sottoinsieme W dello spazio vettoriale V si dirà un **sottospazio vettoriale** di V se W è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni indotte su W da quelle di V.

Ciò significa che $v_1 + v_2 \in W \quad \forall v_1, v_2 \in W.$ e $av \in W \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall v \in W$ o equivalentemente $av_1 + bv_2 \in W \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall v_1, v_2 \in W.$

Vedremo che geometricamente i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono le rette per l'origine e quelli di $\mathbb{R}^3$ sono le rette e i piani per l'origine.

Abbiamo già visto che le funzioni continue e le funzioni derivabili sono sottospazi dello spazio delle funzioni.

Esercizi:

1. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi vettoriali:
$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$ $\qquad Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pi y\}$.

2. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:
$V_1 = \{(x,y,z) \mid x+y+z-1 = 0\}$ $\qquad V_2 = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 0\}$
$V_3 = \{(x,y,z) \mid xz = 0\}$ $\qquad V_4 = \{(t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ $\qquad V_5 = \{(t,t^2,t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$V_6 = \{(a,0,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ $\qquad V_7 = \{(a,1,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ $\qquad V_8 = \{(a,a+c,c) \mid a,c \in \mathbb{R}\}$
$V_9 = \{(a,a+c+1,c) \mid a,c \in \mathbb{R}\}$.

3. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$:
   (a) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(3) = 0\}$;
   (b) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(3) = 3\}$;
   (c) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) + 2f(1) = 0\}$;
   (d) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x+2k\pi) = f(x), k \in \mathbb{N}\}$;
   (e) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x)\}$.

4. Siano u, v vettori non nulli di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V e sia
$U = \{w \in V \mid w = cu + v, c \in \mathbb{R}\}$.
Provare che U è un sottospazio vettoriale di V se e solo se v è proporzionale a u.

5. Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Provare che l'insieme $V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \cdot v = 0 \ \forall v \in V\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Tale sottospazio si dice *ortogonale* di V.

Intersezione e somma

Se W e Z sono due sottospazi di V allora $W \cap Z$ è un sottospazio di V (la prova, molto facile, è lasciata per esercizio).

Invece l'unione di due sottospazi W e Z di V è un sottospazio di V se e solo se i due sottospazi sono uno contenuto nell'altro e quindi l'unione coincide col piú grande. Infatti se $W \not\subset Z$ e $Z \not\subset W$ esistono in $W \cup Z$ un elemento $w \in W, w \notin Z$ e un elemento $z \in Z, z \notin W$, la cui somma $w + z \notin W \cup Z$ (altrimenti, se $w + z \in W$ si avrebbe che anche z ci sta e analogamente se $w + z \in Z$, w starebbe in Z).

Dati due sottospazi W e Z di V definiamo allora **somma** di W e di Z l'insieme

$$W + Z := \{w + z \mid w \in W, z \in Z\}.$$

(1) Provare che $W + Z \supseteq W \cup Z$;
(2) provare che $W + Z$ è un sottospazio di V;
(3) provare che $W + Z$ è il piú piccolo sottospazio di V che contiene W e Z e quindi $W \cup Z$.

Se $W_1, \ldots, W_n$ è un insieme finito di sottospazi di V possiamo definire induttivamente $W_1 + \cdots + W_n$; si ha che $W_1 + \cdots + W_n$ è l'insieme dei vettori che si possono scrivere $w_1 + \cdots + w_n$ con $w_i \in W_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Generatori, elementi linearmente indipendenti, basi

Se v è un vettore di V denotiamo con $< v >$ l'insieme $\{av \mid a \in K\}$. È facile vedere che $< v >$ è uno spazio vettoriale (con le stesse operazioni di V) detto lo spazio generato da v.

Se $v_1, \dots, v_n \in V$ indichiamo con $< v_1, \dots, v_n >$ lo spazio $< v_1 > + \cdots + < v_n >$ ossia:

$$< v_1, \dots, v_n >= \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mid a_1, \dots, a_n \in K\}$$

e lo chiameremo lo **spazio generato** da $v_1, \dots, v_n$.

Un vettore del tipo $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ è detto una **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_n$ e gli scalari $a_1, \dots, a_n$ sono detti i **coefficienti** della combinazione lineare..

Se i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono tali che

$$< v_1, \dots, v_n >= V$$

diremo che $v_1, \dots, v_n \in V$ sono **un sistema di generatori** per V. Ciò significa che ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.

Per esempio tutti i vettori (x, y) del piano possiamo scriverli come combinazione lineare dei **versori** (cioè vettori di modulo 1) degli assi: $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Diciamo che uno spazio vettoriale è **finitamente generato** se ha un sistema di generatori costituito da un numero finito di elementi (esistono anche spazi vettoriali non finitamente generati, per esempio lo spazio vettoriale di tutte le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ma noi considereremo per lo piú quelli con un numero finito di generatori).

Osservazione: Se $V =< v_1, \dots, v_n >$ e $W =< w_1, \dots, w_r >$, allora $V \subseteq W$ se e solo se $v_i \in W$ per ogni $i = 1, \dots, n$. In particolare $V = W$ se e solo se $v_i \in W$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $w_i \in V$ per ogni $i = 1, \dots, r$.

Diciamo che i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono **linearmente indipendenti** se nessuno di essi sta nello spazio generato dai rimanenti o equivalentemente se

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Ciò significa che una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è nulla solo quando tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli.

Una **base** per lo spazio vettoriale V è un insieme di vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ tali che
a) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti
b) $< v_1, \dots, v_n >= V$, ossia $v_1, \dots, v_n$ sono generatori per V.

Esempi:

1. Una base per lo spazio vettoriale K^n è la cosiddetta **base canonica di** K^n che è l'insieme degli n vettori

$$e_1 := (1, \dots, 0), \quad e_2 := (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n := (0, \dots, 1).$$

2. I vettori $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ generano $\mathbb{R}^2$, ma non sono una base.

3. I vettori $(1, 1, 0), (1, 2, 0)$ sono linearmente indipendenti, ma non sono una base di $\mathbb{R}^3$; sono tuttavia una base dello spazio $W = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$.

4. $\mathbb{R}[X]$ ha su $\mathbb{R}$ una base infinita costituita dagli elementi $1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$ cioè $\{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5. Le funzioni polinomiali $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ sono un insieme infinito di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, ma non sono una base.

Si possono dimostrare i fatti seguenti:

Proposizione. *Se $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.*

Dimostrazione. Se $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ e $v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$, allora $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$ da cui $(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0$ e poiché $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V e quindi linearmente indipendenti, si ha $a_1 = b_1 \dots a_n = b_n$.

È facile dimostrare il seguente risultato.

Lemma di scambio. *Se $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V e $w \notin < v_2, \dots, v_n >$ allora $w, v_2, \dots, v_n$ sono una base di V.*

Dimostrazione. Se $w = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ si ha $a_1 \neq 0$ perché $w \notin < v_2, \dots, v_n >$. Allora $v_1 = \frac{1}{a_1}(w - a_2v_2 \cdots - a_nv_n)$ sta in $< w, v_2, \dots, v_n >$ e per l'osservazione precedente $V =< w, v_2, \dots, v_n >$.

Inoltre $w, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti perché se $b_1w + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n = 0$ dev'essere $b_1 = 0$, altrimenti $w \in < v_2, \dots, v_n >$ e quindi anche $b_2 = \cdots = b_n = 0$ perché $v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti in quanto parte di una base.

Si ha allora il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema di equipotenza delle basi. *Due basi di uno spazio vettoriale V sono formate dallo stesso numero di vettori.*

Se V è uno spazio che ha una base, allora si è visto che tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori. Tale numero intero si dirà la **dimensione** di V e si scriverà $dim(V)$.

Per esempio $dim(\mathbb{R}^n) = n$ mentre $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ ha dimensione infinita.

Ci chiediamo ora quando uno spazio vettoriale ha una base.

Teorema di estrazione-completamento di una base. *Se $V =< v_1, \dots, v_n >$ e ad esempio $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti allora si può estrarre una base da $v_1, \dots, v_n \in V$ che contiene $v_1, \dots, v_k$.*

La strategia è la seguente: si guarda se $v_{k+1} \in < v_1, \dots, v_k >$. Se no lo si mantiene, se sí lo si cancella. Procedendo in tale modo si arriva alla conclusione.

Come conseguenza si prova che :

Teorema. *Ogni spazio vettoriale che è finitamente generato ha una base.*

Come ulteriore applicazione del precedente teorema, si prova il

Teorema di completamento di una base. *Se $v_1, \dots, v_k$ sono vettori linearmente indipendenti nello spazio vettoriale V finitamente generato, allora si possono trovare vettori $v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ tali che $v_1, \dots, v_n$ sia una base di V.*

Ne derivano i seguenti risultati :

Corollario 1. *Se $dim(V) = n$ e $s > n$, allora s vettori in V sono sempre linearmente dipendenti.*

Corollario 2. *Ogni sottospazio W di uno spazio finitamente generato V è finitamente generato e quindi ammette una base. Inoltre si ha*

$$dim(W) \leq dim(V)$$

e vale l'uguale se e solo se $W = V$.

Corollario 3. *Se $dim(V) = n$, allora n vettori in V linearmente indipendenti sono una base.*

Corollario 4. *Se $dim(V) = n$, allora n generatori di V sono una base.*

Osservazione: Se W e Z sono due sottospazi di V allora:

$$dim(W + Z) = dimW + dimZ - dim(W \cap Z).$$

La prova è lasciata per esercizio (suggerimento: si sceglie una base dell'intersezione e la si completa a una base di W e a una di Z)

Esercizi:

1. Determinare una base di $M_2(K)$.

2. Determinare una base delo spazio $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z - t = 0\}$

3. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ lo spazio generato da $(1, 2, -1)$ e $(1, 2, 3)$; dire quali dei seguenti vettori stanno in W: $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 4, 2)$.

4. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori $(1, 2, -1)$ e $(-2, -4, 2)$?

5. Siano $u = (1, 1, 3)$ e $V = (2, 4, 0)$. Dire quali dei seguenti vettori sono combinazione lineare di u e v: $(3, 5, 3), (4, 2, 6), (1, 5, 6), (0, 0, 0)$.

6. Sia V un K-spazio vettoriale. Provare che se u, v, w sono vettori di V linearmente indipendenti su K, allora anche $u + v, u + w, v + w$ lo sono, mentre $u + v, v + w, v - w$ sono linearmente dipendenti.

7. Dire se sono linearmente indipendenti i seguenti insiemi di vettori in $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$:
   (a) $\{(0, 1, 1)\}$;
   (b) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$;
   (c) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$;
   (d) $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 3)\}$.

Dire inoltre se tali insiemi generano $\mathbb{R}^3$.

8. Dati i vettori $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 2)$, $u_3 = (-2, 2, 4)$ di $\mathbb{R}^3$:
   (a) dire perché u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti;
   (b) è vero che ognuno dei vettori u_i $(i = 1, 2, 3)$ è combinazione lineare dei rimanenti?
   (c) se $v = (2, 4, 758)$, i vettori v, u_1, u_3 sono indipendenti?

9. Siano $u = (1, 2, -2)$, $v = (2, 0, 1)$, $w = (1, -2, 3)$ vettori di $\mathbb{R}^3$:
   (a) determinare una base di $V =< u, v, w >$;
   (b) determinare un sistema di generatori di V che non sia una base;
   (c) provare che $(3, 2, 0) \notin V$ e $(0, -4, 5) \in V$;
   (d) determinare tutti i modi possibili di scrivere $(0, -4, 5)$ come combinazione lineare di u, v, w.

10. Sia $V = < (2,0,1), (-1,3,1), (1,3,2), (4,0,2) >$. Determinare:
    (a) una base di V e completarla a una base di $\mathbb{R}^3$;
    (b) un sottospazio W di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$ tale che $V \cap W = < (2,0,1) >$.

11. Sia $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+2t = 2x+3y+z-t = 0\}$ e sia $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y+z+3t = 0\}$.
Determinare:
    (a) una base di $V \cap W$;
    (b) una base di $V+W$.

12. Siano $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 0\}$ e sia $u = (1,0,0)$.
    (a) è vero che $V+ < u >= \mathbb{R}^3$?
    (b) determinare un sottospazio proprio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $V+W = \mathbb{R}^3$.

13. Siano $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x-y+z-t = 0\}$ e $W =< (1,-2,1,0), (2,0,1,1), (1,2,0,0) >$.
Determinare dim V+W e una una base di $V+W$.

Caratteristica di una matrice.

Se $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$, con K campo, indichiamo con $A_1 := (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ il vettore di K^n formato con la prima riga di A. Analogamente per $A_2, \dots, A_m$. Il sottospazio di K^n generato da $A_1, \dots, A_m$ si dice **lo spazio delle righe di** A. Allo stesso modo si definisce **lo spazio delle colonne** di A come il sottospazio di K^m generato dai vettori $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$, ove $A^{(i)} :=^t (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$ per $i = 1, \dots, n$.

Con queste notazioni chiameremo **caratteristica per colonne di** A e la indicheremo con $\rho_c(A)$ la dimensione dello spazio delle colonne di A, mentre chiameremo **caratteristica per righe** di A e la indicheremo con $\rho_r(A)$ la dimensione dello spazio delle righe di A.

Teorema. *Per ogni matrice $A \in M_{mn}(K)$ si ha: $\rho_c(A) = \rho_r(A)$.*

Chiameremo allora **rango** o **caratteristica** di A tale numero intero $\rho_c(A) = \rho_r(A)$ e lo indicheremo con $\rho(A)$.

Osserviamo esplicitamente che $\rho(A) = \rho({}^tA)$. Infatti si ha $\rho(A) = \rho_c(A) = \rho_r({}^tA) = \rho({}^tA)$.

Se $A \in M_{n,s}(K)$, si ha sempre

$$\rho(A) \leq min(n,s)$$

infatti le righe di A sono n vettori di $\mathbb{R}^s$ e quindi generano uno spazio di dimensione che non supera né $dim\,\mathbb{R}^s$ né il numero dei vettori.

Abbiamo già osservato che una matrice $A \in M_n(K)$ ha determinante nullo se le sue righe o colonne sono linearmente dipendenti e quindi se la caratteristica è minore di n. Viceversa si può provare che se $\rho(A) = n$ allora A è invertibile e quindi $det(A) \neq 0$. Dunque si ha

$$det(A) \neq 0 \iff \rho(A) = n$$

Se A è una matrice $m \times n$ e t è un intero $1 \leq t \leq \min\{n,m\}$ diciamo **minore** di ordine t di A il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata di A che si ottiene fissando t righe e t colonne. In particolare i minori di ordine 1×1 sono gli elementi di A e se A è una matrice quadrata $n \times n$ c'è un solo minore di ordine n di A ed è il $det(A)$.

Teorema di Kronecker. *Se A è una matrice $m \times n$ consideriamo l'intero t=ordine massimo di un minore non nullo di A. Se esiste un minore di ordine s di A che è non nullo ma che orlato in tutti i modi possibili con l'aggiunta di una riga e una colonna di A è nullo, allora si ha :*

$$\rho(A) = t = s$$

L'idea della dimostrazione è che i vettori colonna della sottomatrice quadrata corrispondente a tale minore sono linearmente indipendenti. Perciò anche le corrispondenti colonne "lunghe" della matrice A sono linearmente indipendenti. Le altre colonne dipendono da queste, altrimenti troveremmo un minore non nullo di ordine maggiore.

Esempio: $\rho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 2$, infatti $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, mentre i due minori di ordine 3 che lo orlano sono nulli (si noti che i minori di ordine 3 sono 4, mentre orlando il minore non nullo basta considerarne 2, il teorema di Kronecker garantisce che anche gli altri due sono nulli).

SISTEMI LINEARI

Sia dato il sistema lineare di m equazioni ed n incognite:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se indichiamo con A la matrice dei coefficienti $A = (a_{ij})$, e con

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

il sistema si può riscrivere come una equazione matriciale

$$AX = B.$$

Teorema di Cramer. *Se $m = n$ e A è invertibile allora il sistema dato ha una e una sola soluzione:*

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{det(A)} A^\star B.$$

Notiamo che $A^\star B$ è una matrice $n \times 1$ che al posto i ha come elemento

$$A^\star_{i1}b_1 + A^\star_{i2}b_2 + \cdots + A^\star_{in}b_n = A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n$$

Questo è il determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo la colonna $i-ma$ con la colonna dei termini noti. Dunque si ha la seguente formula per la soluzione del sistema :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad x_i = \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)}$$

Consideriamo ora un sistema lineare $AX = B$ in m equazioni e n incognite con $n \neq m$ oppure con $n = m$ ma con $det(A) = 0$.
Il sistema è risolubile se e solo se

$$\sum_{i=1}^{n} x_i A^{(i)} = B$$

Dunque il sistema dato è risolubile se e solo se la colonna B di termini noti si può scrivere come combinazione lineare delle colonne della matrice.

Dato il sistema $AX = B$ diciamo **matrice completa** del sistema la matrice $C = (A|B)$ che si ottiene da A aggiungendo come ultima colonna la colonna dei termini noti. È chiaro che C è una matrice $m \times (n+1)$.

Allora $B \in < A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} >$ se e solo se l'ultima colonna della matrice C è combinazione lineare delle precedenti, ovvero se la matrice C ha la stessa caratteristica di A.

Abbiamo cosí provato:

Teorema di Rouchè-Capelli. *Il sistema $AX = B$ ha soluzione se e solo se*

$$\rho(A) = \rho(C).$$

Ora se il sistema $AX = B$ è risolubile in accordo con il precedente teorema, sia $r = \rho(A) = \rho(C)$. Allora si consideri un minore $r \times r$ non nullo di A. Il sistema dato è equivalente al sistema che si ottiene trascurando le equazioni che non corrispondono al minore scelto, in quanto esse sono combinazione lineare delle altre. Per risolvere il sistema si può allora portare a termine noto le incognite che non corrispondono al minore scelto, ottenendo cosí un sistema $r \times r$ la cui matrice dei coefficienti ha per determinante il minore non nullo scelto. Otteniamo dunque un sistema di Cramer che sappiamo risolvere. In tal modo si esprimeranno r delle incognite in funzione delle rimanenti $n - r$. Si dirà allora che il sistema ha ∞^{n-r} **soluzioni**, nel senso che le soluzioni del sistema si ottengono attribuendo ad arbitrio valori alle incognite "libere" che sono appunto $n - r$.

Esempi:

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x + \ y - 2z = 1 \\ x - 2y + \ z = 2 \\ x - 5y + 4z = 3 \end{cases}, \qquad \text{la matrice dei coefficienti} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo. Si ha $r(A) = r(C) = 2$ perché il minore $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ e tutti i minori che lo orlano sono nulli; allora il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x + \ y = 2z + 1 \\ x - 2y = -z + 2 \end{cases}$$

le cui soluzioni con la regola di Cramer sono $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2z+1 & 1 \\ -z+2 & -2 \end{vmatrix}}{-3}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2z+1 \\ 1 & -z+2 \end{vmatrix}}{-3}$, $z = z$, cioè $\{(z + \frac{4}{3}, z+1, z)\}$.

2. Dato il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 1 \\ 2x - 2y + \ t = 2 \\ 3x + y + z = a \end{cases} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}, \text{ la matrice dei coefficienti} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango $r(A) = 2 \leq r(C)$ perché il minore $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ e tutti i minori di A che lo orlano sono nulli; se invece lo orliamo usando la colonna B si ha $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -3 + a$. Quindi se $a \neq 3$ il sistema non ha soluzione perché $r(C) = 3 > r(A)$, se invece $a = 3$ allora il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x - y + t = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}$$

e portando a secondo membro x e y si ottengono ∞^2 soluzioni $(x, y, 3 - 3x - y, 2 - 2x + y)$.

Se in particolare si deve studiare il **sistema omogeneo**

$$AX = 0$$

allora chiaramente $\rho(A) = \rho(C)$, il che corrisponde al fatto che un tale sistema ha sempre la soluzione **banale** ossia la soluzione

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Sia $r = \rho(A)$; se $r = n$ allora il sistema ha solo la soluzione banale, se invece $r < n$ allora lo spazio delle soluzioni del sistema ha dimensione $n-r$ e una base si può ottenere nel seguente modo. Supponiamo per comodità che il minore non nullo di ordine r di A sia quello formato con le prime r righe e le prime r colonne. Allora si ponga

$$x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$$

e si risolva il corrispondente sistema di Cramer ottenendo un vettore

$$v_1 = (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1r}, 1, 0, \ldots, 0).$$

Analogamente si ponga

$$x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+3} = 0, \ldots, x_n = 0$$

e si risolva il corrispondente sistema di Cramer ottenendo un vettore

$$v_2 = (s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2r}, 0, 1, 0, \ldots, 0).$$

Procedendo cosí si ottengono gli $n - r$ vettori $v_1, \ldots, v_{n-r}$ che costituiscono una base dello spazio delle soluzioni.

Osserviamo che se il sistema non è omogeneo le sue soluzioni si ottengono sommando a una sua soluzione particolare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

Un metodo molto importante per la soluzione di un sistema, soprattutto dal punto di vista computazionale, è il cosí detto **metodo di riduzione di Gauss.** Dato il sistema $AX = B$ il metodo consiste nel considerare la matrice completa A' e trasformarla mediante **operazioni elementari** sulle righe, ossia sulle equazioni del sistema, in modo tale che il sistema che si ottiene sia equivalente al sistema dato, e inoltre sia facilmente risolubile. La

forma della matrice che ci si propone di ottenere è la forma **echelon** (a scalini) ossia di una matrice con questa proprietà:
In ogni riga il primo elemento da sinistra non nullo è un 1 **al di sotto del quale, nella corrispondente colonna, ci sono solo degli** 0.

Una matrice in forma echelon si presenta ad esempio cosí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora è chiaro che il corrispondente sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -2 \\ x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

ha soluzione immediata:

$$x_4 = -2, x_3 = 3 - 4x_4 = 11, x_1 = -2 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -2x_2 - 25$$

ossia ∞^1 soluzioni

$$(-2a - 25, a, 11, -2), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

L'algoritmo per ottenere una matrice a scalini è il seguente:
scambiando tra loro le righe si fa in modo che a_{11} sia non nullo;
si divide la prima riga per a_{11} in modo che nella nuova matrice $a_{11} = 1$;
per ogni $i = 2, \ldots, n$ si sottrae alla riga i-esima la prima moltiplicata per a_{i1} e si ottiene cosí una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ripetendo il procedimento a partire dalla seconda riga in modo che si abbia $a_{22} = 1$ e tutti zeri sotto e cosí via fino all'ultima riga si ottiene una matrice a scalini.

Procedendo con le operazioni elementari si può arrivare a trasformare la matrice a scalini in una che ha nulle non solo tutte le entrate sotto alla diagonale a_{ii} ma anche quelle sopra. Le matrici ottenute con trasformazioni elementari conservano la stessa caratteristica e se la matrice è quadrata e il determinante è non nullo si può arrivare a trasformarla nella matrice identica. Questo dà un procedimento per trovare l'infersa della matrice. Infatti fare operazioni elementari equivale a moltiplicare per matrici invertibili (che si ottengono facendo le stesse operazioni sulla matrice identica I). Quindi se alla matrice A affianchiamo I e facciamo tutte le stesse operazioni, quando A si è trasformata in I, la matrice I si trasforma in A^{-1}.

Esercizi:

1) Calcolare la caratteristica delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Discutere la caratteristica delle seguenti matrici al variare di $a \in R$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ a & 0 & a & -a \\ -a & 2 & 1 & 3a \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & a+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Calcolare, se esistono, le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-3y+z=0 \\ -x+y+t=1 \end{cases}$. c) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-3y=1 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$.

4) Scrivere un sistema lineare che abbia $(1,-1,0)$ e $(2,3,2)$ tra le soluzioni.

5) Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni dei seguenti sistemi lineari omogenei:

a) $\begin{cases} x+ay+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$. b) $\begin{cases} ax+y+z+t=0 \\ x-y-t=0 \\ 2x+z+t=0 \\ ax+3y+2z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax+y=0 \\ x+z=0 \\ x+ay-2z=0 \end{cases}$. d) $\begin{cases} x-ay+z+t-2u+v+w=0 \\ ax-y+z+t-2u+v+w=0 \end{cases}$.

6) Discutere i seguenti sistemi lineari al variare di $a \in R$ ed eventualmente di $b \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x+y+az=2a-1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (a+1)^2x+y+(a+1)z=1=0 \\ x+y+2az=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax+by-z=1 \\ -x+by=1 \\ 2x+ay-2z=1 \end{cases}$. d) $\begin{cases} y+z+t=1 \\ ax+z+at=2 \\ x-y+2az=0 \\ x+2z+t=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (a-1)x+y+z=0 \\ 2y+z=0 \\ (a-1)x+ay+2z=2a \\ 4x+(a-2)z=0 \end{cases}$.

7) Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Provare che A è invertibile e determinare l'inversa.
b) Provare che in $M_3(R)$ l'equazione matriciale $AX+C+I=0$ ammette una unica soluzione $\overline{X} \in M_3(R)$ e determinarla.

8) Siano $A, B \in M_n(R)$. Provare o confutare i seguenti enunciati:
a) se $AB = A$, allora $\det(A) = 0$ oppure $\det(B) = 1$.

b) se A è idempotente ($A^2 = A$) e non nulla, allora $\det(A) = 1$.
c) se $AB = BA$, allora $(AB)^n = A^n B^n$.
d) se $AB = A$ e $BA = B$, allora $\det(A) = \det(B) = 0$ oppure $A = B = I$.
e) se ${}^tA = -A$, e A non nulla, allora A è invertibile.
f) se $P, Q \in Gl_n(k)$ sono tali che $PAQ = I$, allora $A^{-1} = QP$.
g) $\rho(A^2) = \rho(A)$
h) se A è invertibile, allora $\rho(AB) = \rho(BA)$.
i) $\rho(A) = \rho({}^tA)$